

## Algebra I Übungsblatt 2

**Aufgabe 5:** Sei  $P$  eine Ecke eines Ikosaeders (Modell wurde in der ersten Übung gebastelt). Beschreiben Sie die fünf Drehungen, die den Fixpunkt  $P$  besitzen. Beschreiben Sie 60 unterschiedliche Drehungen, die das Ikosaeder in sich selbst überführen. Bestimmen Sie für jede Drehung die Ordnung, d.h. den kleinsten positiven Exponenten  $k$  mit  $d^k = id$ .

**Aufgabe 6:** Sei  $G$  eine multiplikativ geschriebene Gruppe mit 12 Elementen, darunter die Elemente  $a$ ,  $b$  und das neutrale Element  $e$ . Es gelte

$$a^k \neq e \quad \text{für } 1 \leq k < 6, \quad a^6 = b^2 = e, \quad ab = ba^{-1}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die 12 Elemente der Form  $a^k b^\ell$  für  $0 \leq k < 6, 0 \leq \ell < 2$  paarweise verschieden sind.
- b) Stellen Sie eine Gruppentafel von  $G$  auf unter Verwendung der Darstellungen aus Aufgabenteil a).

**Aufgabe 7:** In den Aufgabenteilen a) und b) sei  $(G, \cdot)$  eine abelsche Gruppe.

- a) Seien  $a, b \in G$  mit endlichen, teilerfremden Ordnungen  $k$  bzw.  $l$ . Zeigen Sie, dass  $a \cdot b$  die Ordnung  $kl$  besitzt.
- b) Sei  $a \in G$  und  $k$  ein Teiler der Ordnung von  $a$ . Zeigen Sie, dass es in  $G$  ein Element mit Ordnung  $k$  gibt.
- c) (Benötigt Rubik's Cube [=Zauberwürfel]. Wer keinen hat kann zum Nachspielen der Aufgabe in Achims Büro kommen [täglich 10:30-11:30 oder nach Vereinbarung]) Die (zusammengesetzten) Drehoperationen von Rubik's Cube bilden eine Gruppe. Ist sie abelsch? Welche Ordnung hat die Drehung einer Schicht um 90 Grad? Welche Ordnung hat der zweiteilige Spielzug: Drehung der rechten Schicht um 90 Grad (so dass die oberen Würfel der rechten Schicht nach vorne bewegt werden) und anschließende Drehung der unteren Schicht um 90 Grad (so dass die vorderen Würfel der unteren Schicht nach links bewegt werden)? (Die Ordnung liegt zwischen 100 und 150.)

**Aufgabe 8:** Bestimmen Sie jeweils explizit die Elemente und die Ordnung der zyklischen Untergruppe, die von der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  erzeugt wird. . .

- a) . . . in der Gruppe  $GL(2, \mathbb{Q})$ ;
- b) . . . in der Gruppe  $GL(2, \mathbb{F}_2)$  (Körper mit zwei Elementen).