Dr. (USA) A. Kehrein

Algebra I
Übungsblatt 3

Aufgabe 9: (Achtung: Aufgabenteile sind unabhängig voneinander)

a) Sei G eine Gruppe mit 14 Elementen. Wie viele Teilmengen besitzt die Menge G? Wie viele davon enthalten das neutrale Element? Welche Anzahl darf eine Teilmenge besitzen, damit sie im Einklang mit dem Satz von Lagrange zu einer Untergruppe gehören kann? Wie viele Teilmengen davon enthalten das neutrale Element?

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass jede Untergruppe vom Index 2 ein Normalteiler ist.

Aufgabe 10: Bestimmen Sie eine Untergruppe mit Ordnung 3 in der Diedergruppe D_6 (Symmetriegruppe des regelmäßigen Sechsecks). Geben Sie elementweise alle Links- und alle Rechtsnebenklassen dazu an. Welche Linksnebenklassen stimmen mit Rechtsnebenklassen überein?

Aufgabe 11: Seien K und H Untergruppen einer endlichen Gruppe G. Es sei wie üblich $KH := \{kh \mid k \in K, h \in H\}$.

a) Zeigen Sie, dass für die Elementanzahlen gilt $|HK| = \dfrac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.

b) Zeigen Sie, dass genau dann $KH = HK$ gilt, wenn die Menge KH eine Untergruppe von G ist.

c) Bestimmen Sie ein nichttriviales Beispiel einer Untergruppe KH wie in Aufgabenteil b). Überlegen Sie zunächst, was *nichttrivial* in diesem Zusammenhang bedeuten kann/soll.

Aufgabe 12: Für jede Primzahl p bezeichne $Z(p^\infty)$ die Menge der komplexen Zahlen z, so dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $z^{p^k} = 1$.

a) Stellen Sie für $p = 2$ mindestens sechzehn Gruppenelemente zeichnerisch dar. (Tipp: Einheitskreis)

b) Zeigen Sie, dass $Z(p^\infty)$ mit der komplexen Multiplikation eine unendliche abelsche Gruppe ist. Ist sie zyklisch?

c) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $Z(p^\infty)$. Welche sind zyklisch?

d) Bestimmen Sie alle Faktorgruppen von $Z(p^\infty)$. Welche sind isomorph zu $Z(p^\infty)$?

e) Zeigen Sie, dass $Z(p^\infty)$ nicht endlich erzeugt ist.

Das ist die *quasizyklische Gruppe* bzw. *Prüfergruppe* zur Primzahl p.