Dr. (USA) A. Kehrein

# Algebra I
## Übungsblatt 4

**Aufgabe 13:** Seien $(H, \bullet)$ und $(K, \circ)$ Gruppen mit neutralen Elementen $1_H$ bzw. $1_K$. Zeigen Sie:

1. Die Verknüpfung $((h,k),(h',k')) \mapsto (h \bullet h', k \circ k')$ macht die Menge $H \times K$ zu einer Gruppe. Sie heißt *äußeres direktes Produkt von $H$ und $K$* und wird ebenfalls mit $H \times K$ bezeichnet.

2. Die Abbildungen $\phi\colon H \to H \times K$, $h \mapsto (h, 1_K)$ und $\psi\colon K \to H \times K$, $k \mapsto (1_H, k)$ sind Homomorphismen. Die Untergruppen Bild $\phi$ und Bild $\psi$ sind Normalteiler in $H \times K$, und es gilt $(\text{Bild } \phi)(\text{Bild } \psi) = (\text{Bild } \psi)(\text{Bild } \phi)$.

3. Für die Elementanzahlen gilt $|H \times K| = |H| \cdot |K|$.

4. Seien nun $H$ und $K$ Untergruppen einer Gruppe $G$. Dann heißt $G$ *inneres direktes Produkt von $H$ und $K$*, falls $H$ und $K$ Normalteiler in $G$ sind und $G = HK$ sowie $H \cap K = \{1\}$ gilt. Zeigen Sie, dass dieses innere direkte Produkt isomorph zu dem äußeren direkten Produkt $H \times K$ ist. (Deshalb wird häufig auf die Unterscheidung zwischen *innerem* und *äußerem* direkten Produkt verzichtet.)

**Aufgabe 14:** Sei $n$ eine natürliche Zahl.

1. Beschreiben Sie Unter- und Faktorgruppen von $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Welche der folgenden Gruppen sind isomorph zueinander? $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $V_4$, $\mathbb{Z}_6$, $S_3$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5^*$, $\mathbb{Z}_7^*$ und $\mathbb{Z}_8^*$.

**Aufgabe 15:** Seien $H$ Untergruppe und $N$ Normalteiler einer Gruppe $G$. Dann heißt $G$ *semi-direktes Produkt*, in Zeichen $G = N \rtimes H$, wenn $G = HN$ und $H \cap N = \{1\}$. Zeigen Sie, dass ein direktes Produkt ein semi-direktes Produkt ist. Finden Sie eine endliche Gruppe, die semi-direktes Produkt zweier nichttrivialer Untergruppen, aber nicht isomorph zu ihrem direkten Produkt ist.

**Aufgabe 16:** Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe $S_4$ nur zwei nichttriviale Normalteiler besitzt, nämlich die alternierende Gruppe $A_4$ und $V := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Zu welcher Gruppe ist $V$ isomorph? Zu welcher Gruppe ist $S_4/V$ isomorph? **Tipps**: Sei $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden: Jede Permutation in $S_4$ lässt sich in einer der folgenden disjunkten Zykeldarstellungen schreiben $(i)(j)(k)(l)$, $(i)(j)(kl)$, $(ij)(kl)$, $(i)(jkl)$, $(ijkl)$. Weiterhin gilt für paarweise verschiedene $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ und $\sigma \in S_n$, dass $\sigma(i_1 \ldots i_r)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_r))$.