Dr. (USA) A. Kehrein

Algebra I
Übungsblatt 5

Aufgabe 17: Sei G Gruppe. Die Untergruppe $G' := \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$ heißt *Kommutatorgruppe* von G. Zeigen Sie:

a) Die Kommutatorgruppe G' ist ein Normalteiler und die Faktorgruppe G/G' ist abelsch.

b) Sei N ein Normalteiler von G. Ist die Faktorgruppe G/N abelsch, so gilt $G' \subseteq N$.

Aufgabe 18: Eine Gruppe $G \neq \{e\}$ heißt *einfach*, wenn $\{e\}$ und G ihre (einzigen) Normalteiler sind (vgl. Primzahldefinition).

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Konjugationsklassen der alternierenden Gruppe A_5 (Tipp: disjunkte Zykeldarstellung).
2. Zeigen Sie, ein Normalteiler ist eine Untergruppe, deren Menge Vereinigung von Konjugationsklassen ist.
3. Zeigen Sie, dass A_5 einfach ist.

Aufgabe 19: Zeigen Sie, dass die Gruppe der Symmetriedrehungen des Ikosaeders isomorph zur alternierenden Gruppe A_5 ist. Sie können dazu die folgende Anleitung verwenden: Die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems schneiden das Ikosaeder (bei geeigneter Koordinatenwahl) in sechs Kantenmittelpunkten. Markieren Sie diese Schnittpunkte rot. Legen Sie analog ein weiteres Koordinatensystem durch die verbleibenden Kantenmittelpunkte. Markieren Sie diese Schnittpunkte grün. Fahren Sie so fort - drei weitere Koordinatensysteme/Farben - bis alle Kantenmittelpunkte markiert sind. Begründen Sie kurz, warum jede Symmetriedrehung eindeutig eine Permutation der Koordinatensysteme/Farben definiert. Zeigen Sie, jede dieser Permutationen ist gerade (Tipp: Zykeldarstellung). Warum definiert die Abbildung, die jeder Symmetriedrehung wie oben eine Permutation zuordnet einen Homomorphismus? Zeigen Sie, die Abbildung ist bijektiv.

Aufgabe 20:

a) Zeigen Sie, dass das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n für $n \neq 2$ trivial ist. Diskutieren Sie auch den Fall $n = 2$.

b) Berechnen Sie das Zentrum der Diedergruppe D_n. Geben Sie eine nichtkommutative Gruppe an, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist.

c) Sei k eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass eine Gruppe mit Primzahlpotenzordnung ein nichttriviales Zentrum besitzt. (Tipp: Klassengleichung)