

Algebra I Übungsblatt 7

Aufgabe 25: Welche der folgenden Zerlegungen können nicht als rechte Seite der Klassengleichung einer Gruppe der Ordnung 10 auftreten?

$$1 + 1 + 1 + 2 + 5, \quad 1 + 2 + 2 + 5, \quad 1 + 2 + 3 + 4, \quad 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

Aufgabe 26: Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe mit 56 Elementen gibt. Tipp: Betrachten Sie die Anzahlen der Sylow-Untergruppen und zählen Sie Elemente.

Aufgabe 27: Beschreiben Sie alle Gruppen der Ordnung 21 bis auf Isomorphie. Anleitung:

- a) Zeigen Sie, es gibt mindestens eine 3-Sylow-Untergruppe und genau eine 7-Sylow-Untergruppe S . Welche Gruppenstruktur besitzt D bzw. S ?
- b) Gilt $DS = SD$? Wie viele Elemente besitzen $S \cap D$ bzw. SD ? Welche Gruppenstruktur ergibt sich für die Gruppe mit 21 Elementen?
- c) Zeigen Sie, dass D per Konjugation auf S operiert. Wie viele wesentlich verschiedene solche Operationen gibt es?

Aufgabe 28: Konstruieren Sie als Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_7 eine Gruppe der Ordnung 21, die 7 Sylow-Untergruppen der Ordnung 3 besitzt.