Prof. Dr. F. Kalhoff
Dr. (USA) A. Kehrein

Abgabe: 28./29. Juni 2005 (in der Übung)

Algebra I
Übungsblatt 10

Aufgabe 37: Sei K ein Körper. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Das Ideal $\langle 2x^2 - 8 \rangle \subset K[X]$ ist prim.

b) Der Kern eines jeden Ring-Homomorphismus $\varphi\colon K[X] \to K[T]$ ist ein Primideal.

c) Das Ideal $\langle x-2, y+1 \rangle$ ist maximal in $K[X,Y] := (K[X])[Y]$.

Aufgabe 38: Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{a + \sqrt{-3}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ein Unterring der komplexen Zahlen ist.

b) Geben Sie in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ zwei wesentlich verschiedene Faktorisierungen von 4 in irreduzible Elemente an.

Aufgabe 39: Sei K ein Körper und C_n die multiplikativ geschriebene zyklische Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie, dass der Gruppenring $K[C_n]$ isomorph ist zum Faktorring $K[X]/(X^n - 1)$.

Aufgabe 40: Über dem Körper K betrachten wir den Folgenraum $K^{\mathbb{N}_0} = \{(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid c_k \in K \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}$ und schreiben seine Elemente in der Art

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} c_k X^k := (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

Wie in (7.1) der Vorlesung seien Addition und Multiplikation gegeben durch

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_k X^k + \sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k X^k := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} (a_k + b_k) X^k$$

und

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_k X^k \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k X^k := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \Big(\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}_0 \\ i+j=k}} a_i b_j \Big) X^k.$$

Weiter sei der *Untergrad* von $c := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} c_k X^k$ definiert als $\partial(c) := \min\{m \mid c_m \neq 0\}$, falls $c \neq 0 := (0)_{k\in\mathbb{N}_o}$, und $\partial(0) := \infty$. Zeigen Sie

a) $K[[X]] := (K^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$ wie oben ist ein kommutativer Ring mit 1 (*Ring der formalen Potenzreihen über K*).

b) $\partial(f+g) \geq \max\{\partial(f), \partial(g)\}$ und die Gradformel $\partial(f\cdot g) = \partial(f) + \partial(g)$.

c) Berechnen Sie die Einheiten in $K[[X]]$.

(Tipp: Analysis - Cauchy-Produkt und geometrische Reihe)