Prof. Dr. F. Kalhoff Abgabe: 12./13. Juli 2005 (in der Übung)
Dr. (USA) A. Kehrein

Algebra I
Übungsblatt 12

Aufgabe 45: Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ vom Grad kleiner gleich 5.

Aufgabe 46:

a) Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von $f := X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$ und $g := X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und bestimmen Sie Polynome $u, v \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\mathrm{ggT}(f, g) = u \cdot f + v \cdot g$.

b) Seien nun $f := X^9 - X^7 - X^3 + 1$ und $g := X^4 + X + 1$. Dividieren Sie f durch g mit Rest in $\mathbb{Z}[X]$, in $\mathbb{F}_2[X]$ und in $\mathbb{F}_3[X]$.

Aufgabe 47: Sei R eine Ringerweiterung eines Körpers K. Sei $\beta \in R$ algebraisch über K. Zeigen Sie

a) Ein normiertes Polynom $f \in K[X] \setminus \{0\}$ ist genau dann das Minimalpolynom m_β, wenn $f(\beta) = 0$ und f irreduzibel über K ist.

b) Ist β algebraisch über K, so berechnet das folgende Verfahren das Minimalpolynom m_β:

   (a) Setze $e := 1$.

   (b) Sind die Potenzen $1, \beta, \ldots, \beta^e$ linear unabhängig über K, dann erhöhe e um 1 und führe erneut diesen Schritt durch.

   (c) Ist $c_0 + c_1\beta + \ldots + c_e\beta^e$ eine nichttriviale Linearkombination der Null, so gib $m_\beta := (c_0 + c_1X + \ldots + c_eX^e)/c_e$ aus und stoppe.

c) Bestimmen Sie die Minimalpolynome von $1 + i, \sqrt{2} + i \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 48: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem jede von Null verschiedene Nichteinheit eine Faktorisierung in endlich viele Primelemente besitzt. Zeigen Sie

a) Jedes Primelement ist irreduzibel.

b) Jedes irreduzible Element ist Primelement.

c) Die oben erwähnte Faktorisierung ist bis auf Reihenfolge und assoziierte Faktoren eindeutig. (Der Ring erweist sich damit als faktoriell.)

d) Zu je zwei Elementen gibt es einen größten gemeinsamen Teiler.