Prof. Dr. F. Kalhoff
Dr. (USA) A. Kehrein

Abgabe: 19./20. Juli 2005 (in der Übung)

Algebra I
Übungsblatt 13

Aufgabe 49: Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $\beta_1, \ldots, \beta_r \in L$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

a) $\beta_1, \ldots, \beta_r$ sind algebraisch über K.

b) $K(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ ist eine endliche Erweiterung über K.

c) $K(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ ist eine algebraische Erweiterung über K.

Zeigen Sie weiter, sind $K \subseteq L$ und $L \subseteq H$ algebraische Erweiterungen, so ist auch $K \subseteq H$ algebraisch.

Aufgabe 50: Sei $L = \mathbb{Q}(Z)$ der Körper der rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten und der Unbestimmten Z. Weiter sei $K = \mathbb{Q}(\frac{Z^3}{Z+1})$. Zeigen Sie, dass L eine einfache, algebraische Erweiterung von K ist. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von Z über K.

Aufgabe 51: Sei p eine Primzahl und $K := \mathbb{F}_p(T)$ der Quotientenkörper des Polynomrings über dem Körper mit p Elementen. Zeigen Sie, dass $X^p - T \in K[X]$ irreduzibel über K ist und mehrfache Nullstellen hat. Zeigen Sie, dass $K \subset K[X]/(X^p - T)$ eine nichtseparable Erweiterung ist.

Aufgabe 52: Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal(f : \mathbb{Q})}$ des Polynoms $f := X^5 - 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie dazu:

1. Das Polynom f ist irreduzibel und separabel. Die Ordnung von $\mathrm{Gal(f : \mathbb{Q})}$ teilt 120. Die Galoisgruppe operiert transitiv auf den Wurzeln von f und 5 teilt die Ordnung von $\mathrm{Gal(f : \mathbb{Q})}$.

2. Nach geeigneter Nummerierung gilt $\sigma := (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in \mathrm{Gal(f : \mathbb{Q})}$ (Zykelschreibweise).

3. f besitzt genau drei reelle Nullstellen (Tipp: f' betrachten).

4. $\mathrm{Gal(f : \mathbb{Q})}$ enthält eine Transposition $(a\ b)$ (Tipp: Komplexe Konjugation). Es gibt eine Potenz $\sigma^n = (a\ b\ c\ d\ e)$.

5. S_5 wird von $(a\ b)$ und $(a\ b\ c\ d\ e)$ erzeugt, also $\mathrm{Gal(f : \mathbb{Q}) = S_5}$.