Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 25. April 2005

Analysis II für Lehramt Gymnasium

3. Übungsblatt, SS 2005

Abgabe bis Montag, 2. Mai 2005, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergent ist, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Reihenwert.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^{3k+2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^4)^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(5-x^2)^{2k}$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls eine geeignete Abschätzung für den Reihenwert an:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+2}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1-\frac{1}{k}\right)^k$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$.

b) Es sei (a_k) eine Nullfolge und $p \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+p}) = \sum_{k=1}^{p} a_k$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Reihe $s(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

a) Zeigen Sie, dass $s(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Weisen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ folgende Abschätzung nach:

$$f(x) := 1 - \frac{x^2}{2} \leq s(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} =: g(x)$$

c) Berechnen Sie jeweils die kleinste positive Nullstelle von f, g und finden Sie damit eine Abschätzung für die kleinste positive Nullstelle von s. (Warum existiert diese?)