Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 2. Mai 2005

Analysis II für Lehramt Gymnasium

4. Übungsblatt, SS 2005

Abgabe bis Montag, 9. Mai 2005, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Es sei s der Wert der alternierenden harmonischen Reihe und σ der Wert der Reihe

$$\sigma := \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + ...$$

a) Bestimmen Sie a_{3k}, a_{3k+1} und a_{3k+2}.

b) Zeigen Sie $\sigma = \frac{s}{2}$, indem Sie $\sum\limits_{k=0}^{3n+2} a_k$ auswerten und $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \to \frac{s}{2}$ berücksichtigen.

Aufgabe 2

Zeigen Sie analog dazu, dass der Wert der alternierenden harmonischen Reihe $\ln 2$ ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Aufgabe 3

a) Es sei (a_n) eine Nullfolge und $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{3n} a_k = s$. Zeigen Sie: $\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s$

b) Geben Sie für die alternierende harmonische Reihe die ersten 8 Glieder einer Umordnung an, deren Wert $\frac{3}{4}$ ist.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie (im Falle der Existenz) den Limes superior bzw. inferior der Folge

$$3(-1)^n + 5(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

b) Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen. Zeigen Sie:

1) Ist $a := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $a_n \geq c > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$