Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 6. Juni 2005

Analysis II für Lehramt Gymnasium

9. Übungsblatt, SS 2005

Abgabe bis Montag, 13. Juni 2005, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$.

a) Bestimmen Sie für jedes f_n alle lokalen Extremstellen in $\mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass es sich um globale Extremstellen handelt.

b) Bestimmen Sie die Grenzfunktion von (f_n) und zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Ergebnisses in a), dass die Konvergenz gleichmäßig ist.

c) Bestimmen Sie die Grenzfunktion von (f_n'). Ist diese Konvergenz gleichmäßig? Bewerten Sie die Ergebnisse aus b) und c).

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind:

a) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^3}$ b) $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k \cos kx}{k!}$

Hinweis: Betrachten Sie in b) zunächst die Intervalle $[-q, q]$, $q > 0$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Konvergenzintervalle folgender Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n(1+a^2)^n} \quad (a \in \mathbb{R})$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^a a^n} \quad (a > 0)$

Konvergieren die Reihen auch in den Randpunkten ihres Konvergenzintervalls?

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{(3+2(-1)^n)n} x^n$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} (x-1)^{2n}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{8^n+5} x^{3n+1}$

Wo liegt gleichmäßige Konvergenz vor?