Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 13. Juni 2005

Analysis II für Lehramt Gymnasium

10. Übungsblatt, SS 2005

Abgabe bis Montag, 20. Juni 2005, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils die Taylorreihe von f in x_0 und deren Konvergenzintervall:

a) $f(x) = \arcsin x,\ x_0 = 0$ b) $f(x) = \operatorname{Arsinh} x,\ x_0 = 0$ c) $f(x) = \sqrt[4]{x},\ x_0 = 1$

Wo stimmt jeweils die Taylorreihe mit der Funktion überein?

Aufgabe 2

Gegeben sei $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k$ und das Intervall $I := [-1, 1]$. Zeigen Sie:

a) f konvergiert auf I gleichmäßig und stellt dort eine stetige Funktion dar.

b) Für alle $x \in I$ gilt $f(x) = \sqrt{1+x}$.

c) Für alle $x \in I$ gilt $|x| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (x^2-1)^k$ und $\left| |x| - \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} (x^2-1)^k \right| \le \frac{6}{\sqrt{n}}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung $\left| \binom{\frac{1}{2}}{k} \right| \le \frac{e^{\frac{1}{24k}}}{(2k-1)\sqrt{\pi k}} \le \frac{3}{k^{\frac{3}{2}}}$ (ohne Beweis).

Aufgabe 3

a) Beschreiben und skizzieren Sie $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \le 1\}$ für $p = 1, 2, \infty$.

b) Es sei $A \subset \mathbb{R}^m$ und $d_A(x) := \inf\limits_{z \in A} \|x - z\|$ für $x \in \mathbb{R}^m$. Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}^m$ an mit

$$d_A(x) = 0.$$

Aufgabe 4

Für $A, B \subset \mathbb{R}^m$ sei $d(A, B) := \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$.

a) Es sei $d(A, B) = 0$. Zeigen Sie, dass es $(a_n) \subset A,\ (b_n) \subset B$ gibt mit $\|a_n - b_n\| \to 0$.

b) Es sei $d(A, B) = 0$ und A beschränkt. Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}^m$ und Folgen $(a_n) \subset A,\ (b_n) \subset B$ gibt mit $a_n \to x, b_n \to x$.

c) Skizzieren Sie die Mengen $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in R\},\ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$. Existieren hier $x \in \mathbb{R}^m$ und Folgen $(a_n) \subset A,\ (b_n) \subset B$ mit $a_n \to x, b_n \to x$?