Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 20. Juni 2005

Analysis II für Lehramt Gymnasium

11. Übungsblatt, SS 2005

Abgabe bis Montag, 27. Juni 2005, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei $\|x\| = 2|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|$.

a) Zeigen Sie, dass $\|\,.\,\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen und skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$.

c) Bestimmen Sie $a, b > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $a\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\|x\|_2$

Aufgabe 2 *(Metrik des französischen Eisenbahnsystems)*

Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ sei $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf einer Geraden durch 0 liegen.} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen und skizzieren Sie $K_r(1,0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,(1,0)) < r\}$ für $r = \frac{1}{2}, 2$.

Aufgabe 3

a) Es sei $A \subset X$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie:

1) $x \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von A, wenn $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.
2) $x \in A$ ist genau dann ein isolierter Punkt von A, wenn $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$.

b) Bestimmen Sie jeweils M°, $\overline{M}$, ∂M und die Menge aller isolierten Punkte von M. Ist M offen? Ist M abgeschlossen?

1) $M = (\,]-1,2] \cap [2,3[\,) \cup]3,4]$
2) $M = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 > 1,\ x_1 \neq 0\}$

Aufgabe 4

Es seien A, B nichtleere Teilmengen von X. Zeigen Sie:

a) Die Mengen $\overline{A}$ und ∂A sind abgeschlossen.

b) Ist $A \subset B$ und B abgeschlossen, so gilt $\overline{A} \subset B$.