Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 27. Juni 2005

Analysis II für Lehramt Gymnasium

12. Übungsblatt, SS 2005

Abgabe bis Montag, 4. Juli 2005, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob für die nachfolgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existieren, und berechnen Sie diese ggf. Ist f stetig? Läßt sich f in $(0,0)$ stetig ergänzen?

a) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+(x-y)^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ c) $f(x,y) = \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

Aufgabe 2

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(e^y-1)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{y} & ,y \neq 0 \\ x & ,y = 0 \end{cases}$

b) Für welche $\alpha > 0$ läßt sich $g(x) = \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_n}{\|x\|_2^\alpha}$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0)$ in 0 stetig fortsetzen?

Aufgabe 3

Es seien $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, e_ν, $\nu = 1,...,n$, die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ und E_j, $j = 1,...,m$, die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^m$.

a) Beschreiben Sie $T(e_\nu)$ als Linearkombination der E_j und zeigen Sie, dass es eine (m,n)-Matrix A gibt mit $T(x) = Ax$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$: $\|T(x)\|_2 \leq \max_{\nu=1,...,n} \|T(e_\nu)\|_2 \|x\|_1$

Aufgabe 4

Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) X ist vollständig.

b) $A \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn A abgeschlossen in X ist.