

Analysis II für Lehramt Gymnasium

14. Übungsblatt, SS 2005

Abgabe bis Montag, 18. Juli 2005, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 *Polarkoordinaten*

Gegeben seien die Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$.

- Bestimmen Sie die Ableitung von g .
- Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(r, \varphi) := f(g(r, \varphi))$.
- Es sei $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v(r, \varphi) := u(g(r, \varphi))$. Zeigen Sie:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_0^{x^2} e^{(x+y)^2} dy$. Bestimmen Sie

- Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ so, dass $F(x) = f(g(x))$ gilt, und
- mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von F .

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x^3 + 3e^{2y} - 6xe^y$. Bestimmen Sie

- die Richtungsableitung von f in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ und
- alle lokalen Extrema und Sattelpunkte. Liegt ein globales Minimum vor?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie lokale Extrema und Sattelpunkte auf $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > -1\}$ von

$$f(x, y, z) = 4x^2 - x^2y^2 + 7y^2 - 12yz + 12z^2.$$