Hausaufgaben zur Vorlesung
Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 26.04.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $v \in \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeige: $\lim\limits_{p \to \infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$.

Aufgabe 2:
Sei $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$. Definiere für $v = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|v\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

a) Zeige, dass $\|v\|_p$ positiv und homogen ist.

b) Zeige durch ein Gegenbeispiel für $n = 2$, dass $\|\cdot\|_p$ **nicht** die Dreiecksungleichung erfüllt, also keine Norm ist.

Aufgabe 3:
Betrachte $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{1}{1+nx}$.

a) Bestimme den punktweisen Grenzwert von f_n.

b) Zeige, dass f_n bzgl. $\|\cdot\|_p$ konvergiert für alle $p \geq 1$.

c) Zeige, dass f_n keinen gleichmäßigen Grenzwert hat.

d) Sei $\varepsilon > 0$ und $g_n := f_n|_{[\varepsilon,\infty)}$. Zeige, dass (g_n) gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei

$$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\,x\,e^{-nx^2}.$$

a) Bestimme den punktweisen Grenzwert von f_n.

b) Zeige: Ist $0 \in [a,b]$, so konvergiert f_n nicht gleichmäßig.

c) Zeige: Ist $0 \notin [a,b]$, so konvergiert f_n gleichmäßig.