3. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 03.05.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:
Zeige, dass die folgenden Teilmengen von $C^\circ([a,b])$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ abgeschlossen sind.

a) $A = \{f \in C^\circ([a,b]) \quad | \quad f(a) = 1\}$

b) $A = \{f \in C^\circ([a,b]) \quad | \quad 0 \leq f \leq 1\}$

Aufgabe 2:
Für die folgenden Teilmengen von $C^\circ([a,b])$ bestimme $\overline{A}$, A° und ∂A bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

a) $A = \{f \in C^\circ([a,b]) \quad | \quad f(a) > 0, \quad f(b) \leq 1\}$

b) $A = \{f \in C^\circ([a,b]) \quad | \quad f(a) + f(b) \in (0,2]\}$.

Die Antworten sind selbstverständlich zu begründen.

Aufgabe 3:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Zeige: Für $p \geq 1$ gilt:

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^p \leq (b-a)^{p-1} \int_a^b |f(x)|^p\, dx.$$

(Hinweis: Hölderungleichung).

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^\circ([a,b])$. Zeige:

Wenn $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ für ein $f \in C^\circ([a,b])$, $p \geq 1$, dann folgt auch $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$.