4. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 10.05.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Ist $K \subset X$ kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist auch $K \cap A \subset X$ kompakt.

b) Sind $K_1, K_2 \subset X$ kompakt, so ist auch $K_1 \cup K_2 \subset X$ kompakt.

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.
Zeige: f ist eine Kontraktion genau dann, wenn

$$\|f'\|_\infty < 1, \quad \text{wobei} \quad \|f'\|_\infty := \sup\{|f'(x)| \bigm| x \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 3:
Sei $M_{n,m}(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller $n \times m$-Matrizen mit reellen Einträgen. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$.

a) Für jedes $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ ist $\{\|Av\| \bigm| v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| = 1\}$ beschränkt.
(Hinweis: Zeige zunächst: Die Abbildung $v \mapsto \|Av\|$ ist stetig.)

b) Zeige: Für $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ ist

$$\big\{\|Av\| \bigm| v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| = 1\big\} = \left\{\frac{\|Av\|}{\|v\|} \bigm| v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0\right\}$$

c) Definiere $\|\cdot\|_M : M_{n,m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $\|A\|_M := \sup\{\|Av\| \bigm| v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1\}$.
Zeige: $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm auf $M_{n,m}(\mathbb{R})$.

d) Zeige: Für $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|Av\| \leq \|A\|_M \|v\|$