5. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 17.05.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:
Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung.
Zeige: Ist X wegzusammenhängend, dann ist auch Y wegzusammenhängend.

Aufgabe 2:
Sei $A := \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in (0,1) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$B := \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$C := A \cup B$.

a) Skizziere die Mengen A und B.

b) Zeige: A und B sind wegzusammenhängend.

c) Zeige: C ist **nicht** wegzusammenhängend.

d) Sei $U \subseteq C$ offen und abgeschlossen in C.
Zeige: entweder $A \cap U = \emptyset$ oder $A \subseteq U$
entweder $B \cap U = \emptyset$ oder $B \subseteq U$.

e) Zeige: C ist zusammenhängend.

Aufgabe 3:
Seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Kurven, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.
Sei $< \_\,,\ \_ >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt

$$< v, w > := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i, \qquad \text{wobei} \qquad v = (v_1, ..., v_n),\ w = (w_1, ..., w_n).$$

a) Zeige: $(< f(t), g(t) >)' = < f'(t), g(t) > + < f(t), g'(t) >$

b) Zeige: $\|f(t)\|_2$ ist konstant genau dann wenn $< f'(t), f(t) > = 0\ \forall t \in I$.