8. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 07.06.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \|x\|.$

a) Bestimme alle Punkte, in denen f differenzierbar ist.

b) Bestimme in diesen Punkten $grad(f)$.

c) Skizziere für $n = 2$ die Niveauflächen und die Gradienten.

Aufgabe 2:
Sei $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(r, \theta, \varphi) = (r \cos\theta \, \sin\varphi, \; r \sin\theta \, \sin\varphi, \; r \cos\varphi).$$

a) Bestimme die Jacobimatrix von f.

b) Zeige, dass die Jacobimatrix invertierbar ist.

c) Zeige: $\|f(r, \theta, \varphi)\| = r$.

d) Zeige: $f|_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)}$ ist injektiv.

Aufgabe 3:
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Seien $x, x_0 \in U$ so, dass $\overline{x x_0} \subseteq U$.
Zeige: Für $v := x - x_0$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + \left(\int_0^1 df\big|_{x_0 + tv} \, dt \right) v,$$

wobei das Integral der Matrix df komponentenweise gebildet wird.