9. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 14.06.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y \neq 0\}$, und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x-y}{x+y}$. Bestimme das Taylorpolynom $T_2^{f;x_0}$, wobei $x_0 := (1,1)$.

Aufgabe 2:
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt. x_0 heißt **Sattelpunkt** von f, falls die Hessesche Matrix $\mathcal{H}_{x_0}(f)$ weder positiv noch negativ semidefinit ist.

a) Zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - y^2$ hat einen Sattelpunkt.

b) Skizziere den Graphen von f, d.h. die Menge

$$\{\big(x, y,\ f(x,y)\big) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

in der Nähe des Sattelpunktes.

Aufgabe 3:
Bestimme alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$

Aufgabe 4:
Seien $x^1, ..., x^m \in \mathbb{R}^n$. Zeige: Es gibt genau einen Punkt $S \in \mathbb{R}^n$, für den

$$\sum_{j=1}^{m} \|x^j - S\|^2$$

minimal wird. Bestimme S in Abhängkeit von $x^1, ..., x^m$.