10. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 21.06.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \backslash 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash 0, \quad f(x,y) := (x^2 - y^2,\, 2xy)$.
Zeige: f ist in jedem Punkt lokal invertierbar, aber es gibt keine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \backslash 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash 0$.

Aufgabe 2:
Betrachte die Gleichungen

$$x\; y \cos(xz) = e^y \sin(e^x z) = 0.$$

a) Zeige: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und beliebig oft differenzierbare Funktionen $y, z : (1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$, die durch obige Gleichungen für $x \in (1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon)$ implizit definiert sind.

b) Bestimme $y'(1)$ und $z'(1)$.

Aufgabe 3:

a) Zeige: Es muß Punkte auf der Hyperbel
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 8xy + 7y^2 = 225\}$$
geben, die einen minimalen Abstand zum Ursprung haben.

b) Bestimme den/die Punkt(e) mit dem minimalen Abstand.

Aufgabe 4:

a) Zeige: Die Funktion $f : \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = 4x^2 - 3xy$ muß ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum haben.

b) Bestimme die absoluten Extrema von f.