11. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 28.06.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:

Bestimme das Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x,y) = y$$

auf der Teilmenge $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$.
Skizziere S. Warum läßt sich Satz 3.45 nicht anwenden?

Aufgabe 2:

Sei $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}\sin x, & \text{falls } x > 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

a) Skizziere den Graph von f.

b) Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ gelten die Ungleichungen

$$\frac{2}{(2k+1)\pi} \leq \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(x)dx \leq \frac{1}{k\pi} \qquad \text{und}$$

$$-\frac{2}{(2k+1)\pi} \leq \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} f(x)dx \leq -\frac{1}{(k+1)\pi}.$$

c) Zeige: $\int_0^\infty f(x)dx$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar.

d) Zeige: $\int_0^\infty f(x)dx$ ist **nicht** Lebesgue-integrierbar.

(Hinweis: Existiert $\int f^+(x)dx$ und $\int f^-(x)dx$?)

Aufgabe 3:

Sei $f := \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$. Zeige:

a) f ist nicht Riemann-integrierbar.

b) f ist Lebesgue-integrierbar.