11. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 05.07.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:
Bestimme die folgenden Grenzwerte. Falls Konvergenzsätze verwendet werden, so ist eine Begründung zu geben.

a) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{x}{n})}{(1+\frac{x}{n})^n}\, dx$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\, dx$$

Aufgabe 2:
Definiere $f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} - 2e^{-2kx}$.

a) Zeige: $f_n \longrightarrow f$ für eine Funktion $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx$ und $\int_0^\infty f(x)dx$.

c) Warum widerspricht dieses Ergebnis nicht dem Satz von der monotonen bzw. dominanten Konvergenz?

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ das offene Gebiet zwischen den Kurven

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\} \qquad \text{und} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y - x = 6\}.$$

a) Skizziere Ω.

b) Berechne $\int_\Omega x \; d(x,y)$.