# 3. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

---

**Aufgabe 1:**
Sei $X := [0, \infty)$ mit der Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$.

a) Zeige: Die Abbildung $f : X \to X,\ f(x) = \frac{1}{2+x}$ ist eine Kontraktion.

b) Bestimme den Fixpunkt von $f$.

c) Sei $x_0 := 1,\ x_{n+1} := f(x_n)$. Bestimme $\lim x_n$, und schreibe die Glieder dieser Folge als „Kettenbruch".

**Aufgabe 2:**
Sei $X := \mathbb{R}^2$ mit der Metrik $d(v, w) := \|v - w\|_\infty$.
Sei $K := \{(x, 0) \,|\, 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

a) Zeige: $K$ ist kompakt.

b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge mit $K \subset U$.
Zeige: $\forall x \in [0, 1]\, \exists\, \varepsilon(x) > 0,\ B_{\varepsilon(x)}(x, 0) \subseteq U$. Skizziere $B_{\varepsilon(x)}(x, 0)$ in der gegebenen Metrik.

c) Zeige: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass das offene Rechteck
$R := \{(x, y) \,|\, -\varepsilon < x < 1 + \varepsilon,\ |y| < \varepsilon\}$ in $U$ enthalten ist.

**D.h.:** Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $K \subset U$, so gibt es ein offenes Rechteck $R$ mit $K \subset R \subset U$.

d) Zeige, dass die Folgerung von c) **nicht** für die Mengen
$K = \{(x, 0) \,|\, 0 < x < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und $U := \{(x, y) \,|\, x > 0\}$ gilt, obwohl $K \subset U$.