

7. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Aufgabe 1:

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = xy \sin\left(\frac{\pi}{2}xy^2\right)$.

- a) Zeige: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(1) = 1$, so dass $F(x, f(x)) = 1$ für alle $x \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.
- b) Bestimme $f'(1)$ und $f''(1)$.

Aufgabe 2:

- a) Sei $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := \sqrt[3]{xyz}$.
Bestimme das Maximum von f unter der Bedingung $x + y + z = c$, wobei $c \in \mathbb{R}^+$ fest ist.
- b) Zeige: Für $x, y, z > 0$ ist das **arithmetische Mittel** $\frac{1}{3}(x + y + z)$ stets größer oder gleich dem **geometrischen Mittel** $\sqrt[3]{xyz}$. Wann sind beide Mittel gleich?
- c) Läßt sich dies auch auf n Variablen verallgemeinern?