8. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Die **Cantormenge** wird wie folgt definiert:
$A_0 := [0, 1]$.
A_n besteht aus 2^n disjunkten kompakten Intervallen, und man erhält A_{n+1} durch Ausschneiden des offenen mittleren Drittels jedes dieser Intervalle.

Also: $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$$A_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1]$$

$C := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ heißt **Cantormenge**.

Aufgabe 1:
Zeige: $C \subseteq [0, 1]$ ist kompakt.

Aufgabe 2:
Jedes $x \in [0, 1]$ läßt sich schreiben als $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$, $c_n \in \{0, 1, 2\}$.
Zeige: $C = \left\{ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{3^n} \mid c_n \in \{0, 2\} \right\}$.

Aufgabe 3:
Bestimme eine bijektive Abbildung $C \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und zeige, dass C überabzählbar ist.

Aufgabe 4:
Zeige: C ist eine **Nullmenge**.
(Hinweis: Zeige zunächst: A_n läßt sich durch offene Intervalle mit Gesamtlänge $2 \cdot (\frac{2}{3})^n$ überdecken.)

Aufgabe 5:
Definiere eine Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:
Ist $[0, 1] \backslash A_n = I_1 \cup ... \cup I_{2^n - 1}$, wobei $I_1 < I_2 < ... < I_{2^{n-1}}$ offene Intervalle sind, so definiere $f|_{\overline{I}_k} := \frac{k}{2^n}$.

Skizziere f. Zeige: f ist stetig und für fast alle $x \in [0, 1]$ gilt $f'(x) = 0$. Trotzdem ist f nicht konstant.
(Bemerkung: f heißt **Cantorsche Teufelstreppe**.)