1.Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Aufgabe 1:
Sei $q \in \mathbb{H},\ q = a + bi + cj + dk$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Die **Konjugierte** von q ist definiert durch

$$\overline{q} := a - bi - cj - dk.$$

Wie im komplexen Fall ist $Re\, q = \frac{1}{2}(q + \overline{q}) = a$

$$Im\, q = \tfrac{1}{2}(q - \overline{q}) = bi + cj + dk.$$

Verifiziere folgende Formeln:

a) $q\overline{q} = \overline{q}q = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

b) Für $q, w \in \mathbb{H}$ gilt $\overline{q + w} = \overline{q} + \overline{w}$ und $\overline{qw} = \overline{w}\,\overline{q}$

c) Für $q \neq 0$ ist $q^{-1} := \frac{1}{\|q\|^2}\overline{q}$, so dass $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$.

d) Für $q, w \in \mathbb{H}$ gilt: $Re(q\overline{w}) = Re(w\overline{q}) =< w, q >$, wobei $<, >$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 2:
Es soll gezeigt werden, dass

$$\mathbb{HP}^n = \{\text{1-dimensionale } \mathbb{H}\text{-Unterräume von } \mathbb{H}^{n+1}\}$$

eine $4n-$dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

a) Für $i = 1, ..., n+1$ ist die Abbildung
$$\varphi_i : \mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n} \longrightarrow \mathbb{HP}^n$$
$$(q_1, ..., q_n) \longmapsto span(q_1, ..., q_{i-1}, 1, q_i, ..., q_n)$$
injektiv, und $\varphi_1(\mathbb{H}^n) \cup ... \cup \varphi_{n+1}(\mathbb{H}^n) = \mathbb{HP}^n$.

b) Berechne die Koordinatenübergänge

$$\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : x_j^{-1}(x_i(\mathbb{H}^n) \longrightarrow \mathbb{H}^n,$$

und zeige, dass sie differenzierbar sind.