2.Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Aufgabe 1:

Sei $S^{4n+3} := \{(q_1, ..., q_{n+2}) \in \mathbb{H}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} |q_i|^2 = 1\}$

a) Zeige: Die Abbildung $\phi : S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$

$$v \mapsto [v]$$

ist differenzierbar und eine Submersion.

b) Zeige: Für jedes $x \in \mathbb{HP}^n$ ist $\phi^{-1}(x) \subset S^{4n+3}$ diffeomorph zu S^3.

Aufgabe 2:
Sei $\mathbb{H}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{2n+2} \cong \mathbb{R}^{4n+4}$.

a) Zeige: Es gibt eine eindeutige differenzierbare Abbildung $\psi : \mathbb{CP}^{2n+1} \to \mathbb{HP}^n$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S^{4n+3} \arrow[dl, "\phi'"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \mathbb{CP}^{2n+1} \arrow[rr, "\psi"] & & \mathbb{HP}^n \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $\phi' : S^{4n+3} \to \mathbb{CP}^{2n+1}$ die differenzierbare Abbildung von Blatt 11 des letzten Semesters ist ($v \mapsto span_{\mathbb{C}} v$).

b) Zeige: ψ ist eine Submersion.

c) Zeige: Für jedes $x \in \mathbb{HP}^n$ ist $\psi^{-1}(x) \subset \mathbb{CP}^{2n+1}$ diffeomorph zu S^2.