4.Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Aufgabe 1:
Sei $x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$x(\theta, \varphi) := \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\theta,\, \sin\theta,\, \cos\varphi,\, \sin\varphi).$$

a) Zeige: x ist eine isometrische Immersion.

b) Zeige: $T := x(\mathbb{R}^2) \subset S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ ist diffeomorph zu einem Torus.

c) Bestimme Normalenvektorfelder η_1, η_2 von N.

d) Zeige: $T \subset S^3$ ist minimal, aber $T \subset \mathbb{R}^4$ ist **nicht** minimal.

Bemerkung: T heißt **Cliffordtorus**

Aufgabe 2:
Sei $\phi : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ eine isometrische Immersion, sei $p \in M$, und sei $\varepsilon > 0$ so, dass $\exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ ein Diffeomorphismus auf das Bild ist, $B_\varepsilon(0) \subseteq T_pM$.

a) Zeige: $\phi(M^n) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ ist minimal in $\phi(p)$ genau dann, wenn $\Delta(\phi \circ \exp_p)_0 = 0$, wobei der Laplace-Operator der Funktion $\phi \circ \exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ komponentenweise zu nehmen ist.

b) Zeige: Ist $\phi(M^n) \subseteq S^{n+k-1}$, so ist $\phi(M^n) \subseteq S^{n+k-1}$ minimal in $\phi(p)$ genau dann wenn

$$\Delta(\phi \circ \exp_p)_0 = \lambda(\phi \circ \exp_p)(0).$$