5.Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist die **Divergenz von** X als $(divX)_p := tr(v \mapsto \nabla_v X)$ definiert, d. h. $(divX)_p = \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i)$, wobei $e_1, ..., e_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM ist.
Für $f \in C^\infty(M)$ definiere den **Gradienten von** f als

$$grad\ f \in \mathfrak{X}(M), \quad g(grad\ f, v) = v(f) \quad \forall v \in TM.$$

Der **Laplaceoperator von** f ist gegeben als

$$\Delta f := -div(grad\ f).$$

Aufgabe 1:
Zeige: Für $M = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik ist

$$\Delta\ f = \Delta_0\ f, \quad \text{wobei} \quad \Delta_0\ f = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Aufgabe 2:
Sei $p \in M$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $\exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Zeige: Für $f \in C^\infty(M)$ gilt:

$$(\Delta f)_p = \Delta_0(f \circ \exp_p),$$

wobei $f \circ \exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $B_\varepsilon(0) \subseteq T_pM \cong \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3:
Sei $\phi : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ eine isometrische Immersion. Zeige: $\phi(M^n) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ ist minimal genau dann wenn $\Delta\phi = 0$, wobei der Laplaceoperator komponentenweise zu nehmen ist.

(Bemerkung: Aus dem **Maximumsprinzip** folgt, dass es keine kompakten Minimalflächen in $\mathbb{R}^{n+k}$ geben kann.)

Aufgabe 4:
Sei $\phi : M^n \longrightarrow S^{n+k} \subseteq \mathbb{R}^{n+k+1}$ eine isometrische Immersion.
Zeige: $\phi(M^n) \subseteq S^{n+k}$ ist minimal genau dann wenn

$$\Delta\phi = \lambda\phi$$

für eine Funktion $\lambda : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Hierbei ist der Laplaceoperator wieder komponentenweise zu nehmen.
Zeige außerdem, dass $\lambda = n$.