6.Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt **lokal symmetrisch**, wenn für alle Vektorfelder $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$\nabla_X(R(Y,Z)W) = R(\nabla_X Y, Z)W + R(Y, \nabla_X Z)W + R(Y,Z)\nabla_X W.$$

Sei (M, g) lokal symmetrisch.

Aufgabe 1:
Sei $\gamma : I \longrightarrow M$ eine Geodäte. Zeige: Sind $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$ parallel entlang γ, so ist auch $R(X,Y)Z$ parallel.

Aufgabe 2:
Zeige: Es gibt Konstanten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ und parallele Vektorfelder $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{X}(\gamma)$, so dass $g(E_i(t),\, E_j(t)) = \delta_i^j$ und $R(E_i(t),\, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = \lambda_i E_i(t)$.

Aufgabe 3:
Sei $\gamma : (-l,\ l) \longrightarrow M$ eine Geodäte und $J : (-l,\ l) \longrightarrow TM$ ein Jacobifeld entlang γ. Zeige: Ist $J(0) = 0$, so ist $\|J(t)\| = \|J(-t)\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4:
Für eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) definiere die **geodätische Reflexion in** p

$\sigma_p : U \longrightarrow U \quad , \quad \sigma_p := \exp_p \circ(-Id) \circ \exp^{-1},$

wobei $U := \exp_p(B_\varepsilon(0))$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt ist, dass $\exp_p : B\varepsilon(0) \longrightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist.

Zeige: Ist (M, g) lokal symmetrisch, dann ist σ_p eine Isometrie für alle $p \in M$.

Aufgabe 5:
Zeige umgekehrt: Ist für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) jede geodätische Reflexion σ_p eine Isometrie, dann ist (M, g) lokal symmetrisch.

(Hinweis: Zeige, dass $\sigma_{\gamma(t_0)}\,(\gamma(t_0+t)) = \gamma(t_0-t)$ und $d\sigma_{\gamma(t_0)}\,(E_i(t_0+t)) = -E_i(t_0-t)$ ist.)