7.Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Aufgabe 1:
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die **geodätische Reflexion in** $p \in M$ ist definiert als

$$\sigma_p : U \longrightarrow U, \qquad \sigma_p := \exp_p \circ(-Id) \circ (\exp_p)^{-1},$$

wobei $U := \exp_p(B_\varepsilon(0))$ und $\varepsilon > 0$, so dass $\exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.
Zeige: Ist σ_p eine Isometrie für alle $p \in M$, dann ist M lokal symmetrisch (siehe Aufgabenblatt 6).

(**Hinweis:** Zeige zunächst, dass $\sigma_{\gamma(t_0)}(\gamma(t_0 + t)) = \gamma(t_0 - t)$ und $d\sigma_{\gamma(t_o)}(E_i(t_0 + t)) = -E_i(t_0 - t)$ ist, wobei $\gamma : I \longrightarrow M$ eine Geodäte und $E_1, ..., E_n : I \longrightarrow TM$ parallele orthonormale Vektorfelder entlang γ sind.)

Aufgabe 2:
Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt **symmetrisch**, falls M vollständig ist und es für jedes $p \in M$ eine Isometrie $\sigma_p : M \longrightarrow M$ mit $\sigma_p(p) = p$ und $d\sigma_p = -Id_{T_pM}$ gibt. Zeige: Ist (M, g) symmetrisch, dann ist (M, g) auch lokal symmetrisch.

Aufgabe 3:
Sei (M, g) symmetrisch, $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ eine Geodäte, $E_1(t), ..., E_n(t)$ parallele orthonormale Vektorfelder entlang γ. Zeige:

a) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Isometrie $\sigma_t : M \longrightarrow M$, so dass für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt:

   1) $\sigma_t(\gamma(s)) = \gamma(s + t)$
   2) $d\sigma_t(E_i(s)) = E_i(s + t)$.

b) Es gilt: $\sigma_{t_1} \circ \sigma_{t_2} = \sigma_{t_1+t_2}$, d.h. $\{\sigma_t | t \in \mathbb{R}\}$ ist eine Untergruppe der Isometriegruppe, genannt die **Transvektionsgruppe** von γ.

Aufgabe 4:
Zeige: $(\mathbb{R}^n, g)$ mit der Standardmetrik ist ein symmetrsicher Raum, und beschreibe die Transvektionsgruppen.

Aufgabe 5:
Zeige: (S^n, g) mit der kanonischen Metrik ist ein symmetrischer Raum, und beschreibe die Transvektionsgruppen.