8.Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Aufgabe 1:

Sei $$O(n,\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, AA^t = I\},$$
$$SO(n,\mathbb{R}) := \{A \in O(n,\mathbb{R}) \,|\, \det A = 1\}.$$

a) Definiere $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Sym(n,\mathbb{R})$, $f(A) := AA^t$, wobei $Sym(n,\mathbb{R})$ der Vektorraum der symmetrischen $n \times n-$Matrizen ist. Zeige: I ist ein regulärer Wert von f.
(Hinweis: Zeige $df_A(BA) = 2B$ für alle $B \in Sym(n,\mathbb{R})$.

b) Zeige: $SO(n,\mathbb{R}) \subseteq O(n,\mathbb{R}) \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sind Liegruppen der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

c) Zeige: Die Liealgebra
$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A + A^t = 0\}$$
ist die Liealgebra von $SO(n,\mathbb{R})$ und von $O(n,\mathbb{R})$.

Aufgabe 2:

Sei $$U(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \,|\, AA^* = I\}$$
$$SU(n) := \{A \in U(n) \,|\, \det A = 1\}.$$

a) Definiere $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Sym(n,\mathbb{C})$, $f(A) = AA^*$. Wie in Aufgabe 1 zeige, dass $I \in Sym(n,\mathbb{C})$ ein regulärer Wert ist.

b) Zeige $SU(n) \subseteq U(n) \subseteq GL(n,\mathbb{C})$ sind Lieuntergruppen, und bestimme ihre Dimension.

c) Bestimme die Liealgebren $\mathfrak{su}(n)$ und $\mathfrak{u}(n)$ von $SU(n)$ bzw. $U(n)$.

Aufgabe 3:

Sei $Sp(n) := \{A \in M_n(\mathbb{H}) \,|\, AA^* = I\}$.
Zeige: $Sp(n) \subseteq Gl(4n,\mathbb{R})$ ist eine Lieuntergruppe, und bestimme ihre Liealgebra.