Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Funktionentheorie I" im SS 2005

Bearbeitung in der Übung am 20.04.2005

Aufgabe 1:

Die Einheitssphäre S^2 im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}.$$

$$\mathbb{C} = \left\{z = x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\right\} \cong \mathbb{R}^2$$

bezeichne die Menge der komplexen Zahlen. Sei ∞ ein nicht zu $\mathbb{C}$ gehöriger Punkt und es sei $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Als STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION bezeichnet man die Abbildung

$$\psi \ : \ S^2 \to \hat{\mathbb{C}}\,,$$
$$\psi(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass ψ bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrabbildung ψ^{-1} an.

(b) Durch

$$d \ : \ \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}^+\,,$$
$$d(z_1, z_2) := \ \left\|\psi^{-1}(z_1) - \psi^{-1}(z_2)\right\|$$

wird eine Metrik auf $\hat{\mathbb{C}}$ erklärt (Beweis!). Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^3$. Die Metrik d heißt die CHORDALE METRIK.

Drücken Sie $d(z_1, z_2)$ möglichst einfach durch z_1 und z_2 aus.

(c) Zeigen Sie, dass $\psi : (S^2, \|\cdot\|) \to (\hat{\mathbb{C}}, d)$ ein Homöomorphismus ist, d.h. dass ψ und ψ^{-1} stetig sind.

(d) Beweisen Sie, dass ψ Kreise auf S^2 in Kreise und Geraden der Ebene abbildet.