Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker

SS 2005

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Funktionentheorie I"

Abgabe bis Fr. 29.04.2005

Aufgabe 7:

Es sei $f(z) := \sum a_n z^n$, $a_n, z \in \mathbb{C}$, eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $a_0 \neq 0$.

(ii) Es gibt eine Potenzreihe $g(z) = \sum b_n z^n$, $b_n, z \in \mathbb{C}$, mit positivem Konvergenzradius, und eine Umgebung U von 0, so dass für alle $z \in U$

$$f(z) \cdot g(z) = 1$$

gilt.

Aufgabe 8: [Cauchy-Riemann-DGL, Wirtinger-Kalkül]

Die komplexe Funktion f sei holomorph auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathrm{Re}(f) = \text{const.}$

(ii) $|f| = \text{const.}$

(iii) $f = \text{const.}$

(iv) $\bar{f}$ ist in G holomorph.

Aufgabe 9: [Cauchy-Riemann-DGL, komplexe Differenzierbarkeit]

(i) Sei $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{falls } z = x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \end{cases}.$

Zeigen Sie, dass f in $z = 0$ stetig ist, und die partiellen Ableitungen dort die Cauchy-Riemann-DGL erfüllen. Begründen Sie, warum f in $z = 0$ trotzdem nicht komplex differenzierbar ist.

(ii) Wir betrachten die reelle Funktion $u(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Welche Bedingungen sind an die Koeffizienten a, b und c zu stellen, damit u der Realteil einer holomorphen Funtion ist? Geben Sie diese holomorphe Funktion in Abhängigkeit von z an.

(iii) Wo sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

a) $f(x + iy) = xy + ixy$

b) $f(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

c) $f(x + iy) = y^2 \sin x + iy$

d) $f(x + iy) = \sin^2(x + y) + i \cos^2(x + y)$

(iv) Bestimmen Sie zu $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^y \cos x$ eine Funktion $v(x, y)$, so dass $f = u + iv$ in $\mathbb{C}$ holomorph ist.