Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker SS 2005

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Funktionentheorie I"

Abgabe bis Montag 09.05.2005

Aufgabe 10: [Lemma von Goursat]

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$ für alle Dreiecke $\Delta \subset U$.

Vollziehen Sie den Beweis dieser Aussage nach und skizzieren Sie die wichtigsten Schritte.

Aufgabe 11: [Möbiustransformationen I]

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine komplexe Matrix mit $\det(A) \neq 0$. Die Abbildung

$$\tau_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

heißt Möbiustransformation und ist definiert auf $\mathbb{C}$, falls $c = 0$ und auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$, falls $c \neq 0$. Desweiteren sei $\Delta(A) := (a+d)^2 - 4\det(A)$.

a) Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation τ_A auf ihrem Definitionsbereich holomorph ist.

b) Verifizieren Sie für die Komposition zweier Möbiustransformationen die Identität

$$\tau_A \circ \tau_B = \tau_{AB}$$

(nun ja, zumindest dort wo die Abbildungen definiert sind). Das bedeutet, dass die Möbiustransformationen eine Gruppe $\mathfrak{M}$ bilden und dass $\tau : \mathrm{GL}_2\mathbb{C} \to \mathfrak{M}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Berechnen Sie $\ker\tau$ und geben Sie zu A eine Matrix $\tilde{A}$ an mit $\tau_{\tilde{A}} = \tau_A^{-1}$, die eine möglichst einfache Gestalt hat.

c) Berechnen Sie die Fixpunkte von τ_A, indem Sie zeigen:

Wenn $\Delta(A) \neq 0$ und $c \neq 0$, dann gibt es genau zwei Fixpunkte. Wenn $\Delta(A) = 0$ und $\tau_A \neq \mathrm{id}$, so gibt es genau einen Fixpunkt.

d) Zeigen Sie direkt, dass man jede Möbiustransformation τ_A durch Komposition aus den folgenden Transformationen erhält:

$$\frac{1}{z}, \quad az, \quad z+b \qquad (a,b \in \mathbb{C})$$

Wie kann man dies Ergebnis auf dem Niveau der Matrizen interpretieren?

e) Folgern Sie, dass τ_A Kreislinien im Definitionsbereich auf Kreislinien abbildet, und dass τ_A durch die Bilder dreier Punkte festgelegt ist. Was passiert mit Kreislinien in $\mathbb{C}$, die durch $\frac{-d}{c}$ verlaufen? Was passiert mit Geraden?

Aufgabe 12: [Komplexe Integration, Cauchy-Integralsatz & -Integralformel]

Es bezeichne $S_\rho(z_0)$ die Kreislinie um z_0 mit Radius ρ und $[z_0, \ldots, z_k]$ der die Punkte $z_0, \ldots, z_k$ verbindende Polygonzug. Desweiteren sei im Folgenden $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Weg. Alle Wege sollen einmal im positiven Sinn durchlaufen werden. Berechnen Sie

$$\int\limits_{\gamma(0)=-i,\gamma(1)=i} z\cos z\,dz\,; \qquad \int\limits_{\gamma(0)=u,\gamma(1)=v} \mathrm{Im}(z)\,dz\,;$$

$$\int\limits_{S_1(-1)} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}\,; \qquad \int\limits_{S_2(0)} \frac{\sin z\,dz}{z^2+1}\,;$$

$$\int\limits_{S_\rho(z_0)} \mathrm{Im}(z)\,dz\,; \qquad \int\limits_{S_\rho(0)} \bar{z}\,dz\,;$$

$$\int\limits_{[0,1,z_0,0]} \bar{z}\,dz\,; \qquad \int\limits_{[0,1,z_0,0]} (1+e^{3z})\,dz\,.$$