Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker SS 2005

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Funktionentheorie I"

Abgabe bis Di. 17.05.2005

Aufgabe 13 [noch mehr Integrale]

a) Berechnenen Sie

$$\int_{S_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{e^{1-z}dz}{z^3(1-z)} \qquad \int_{S_3(-2i)} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$$

$$\int_{S_2(1)} \frac{\sin z\, dz}{z(z+2)} \qquad \int_{S_1(0)} \frac{z^k\, dz}{(z-a)^n}, \text{ für } k,n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C} \setminus S_1(0)$$

b) Sei f holomorph auf $B_R(0)$. Sei desweiteren $a = |a|e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ und $|a| < r < R$. Zeigen Sie

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - |a|^2) f(re^{i\phi})\, d\phi}{r^2 - 2r|a|\cos(\theta - \phi) + |a|^2}$$

indem Sie zuerst

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(0)} \frac{(r^2 - |a|^2) f(z)\, dz}{(r^2 - z\bar{a})(z-a)}$$

beweisen.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^4-1}$ für die Wege

$$\gamma_1 = S_{\frac{1}{2}}(1), \quad \gamma_2 = S_{\frac{3}{2}}(0), \quad \gamma_3 = \left\{ \tfrac{1}{4}(2\sin(2t), 5\sin t) \middle|\ t \in [0, 2\pi] \right\}$$

Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an und rechnen Sie kaum.

Aufgabe 14

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet G. Sei $\gamma : [0,1] \to G$ ein geschlossener stückweise stetig differenzierbarer Weg. Zeigen Sie, dass der Ausdruck $\displaystyle\int_\gamma \bar{f}(z) f'(z)\, dz$ rein imaginär ist.

Aufgabe 15 [Möbiustransformation II]

Aus Aufgabe 11 wissen wir, dass die Möbiustransformation $\tau_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ holomorph und als Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ nach $\hat{\mathbb{C}}$ bijektiv ist.

Das DOPPELVERHÄLTNIS vier komplexer Zahlen (z, z_1, z_2, z_3) ist definiert durch

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}\,.$$

i) Erklären Sie das Doppelverhältnis geeignet, falls $z = \infty$ oder $z_i \in \{z, \infty\}$ und zeigen Sie, dass die Abbildung $\tau(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$ eine Möbiustransformation mit $\tau(z_1) = 0$, $\tau(z_2) = 1$ und $\tau(z_3) = \infty$ ist.

ii) Zeigen Sie: Ist τ eine Möbiustransformation mit $\tau(z_i) = w_i$ so ist $DV(z, z_1, z_2, z_3) = DV(\tau(z), w_1, w_2, w_3)$. Das heißt: Das Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen. Leiten Sie daraus eine Formel für τ aus drei bekannten Werten her.

iii) Welche Möbiustransformation bildet $(0, 1, i)$ jeweils auf $(1, i, 0)$, $(1, \infty, 0)$ bzw. $(-2, 0, 2)$ ab?

iv) Sei $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $E := B_0(1)$ die offene Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie, dass

$$\tau(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

H biholomorph auf E abbildet und geben Sie τ^{-1} an.

v) Bestimmen und skizzieren Sie die Bilder unter τ von

$$\bar{E}, \quad B_{\frac{1}{2}}(0), \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$$

vi) Zeigen Sie, dass

$$f(z) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

auf E erklärt und holomorph ist. Bestimmen Sie das Bild der Einheitskreisscheibe unter f, also $f(E)$, und berechnen Sie $f'(z)$.