Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker SS 2005

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Funktionentheorie I"

Abgabe bis Di. 24.05.2005

Aufgabe 16 [Möbiustransformation III]

Für ein Gebiet G ist $Aut(G) := \{f : G \to G \mid f \text{ biholomorph}\}$ die GRUPPE DER AUTOMORPHISMEN von G. Wie in Aufgabe 15 Sei H die obere Halbebene und E die offene Einheitskreisscheibe.

a) Sei τ_A eine Möbiustransformation. Zeigen Sie: Wenn $\tau_A(\mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\}) \subset \mathbb{R}$, so gibt es eine komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ derart, dass ζA eine relle Matrix ist.

b) Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ reell, so gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$:

$$\mathrm{Im}(\tau_A(z)) = \frac{\det(A)}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}(z)$$

Folgern Sie daraus:

$$\tau_A \in Aut(H) \Longleftrightarrow \exists \zeta \in \mathbb{C} : \ \zeta A \text{ reell, und } \det(\zeta A) > 0\,.$$

c) Mit Hilfe der speziellen Möbiustransformation $\frac{z-i}{z+i}$ aus Aufgabe 15 vi) zeigen Sie

$$\tau_A \in Aut(E) \Longleftrightarrow \exists \zeta \in \mathbb{C} : \ \zeta A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \text{ und } \det(\zeta A) > 0\,.$$

d) Stellen Sie die Automorphismen von E aus c) in der folgenden Form dar:

$$\tau(z) = e^{it} \cdot \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}, \quad t \in \mathbb{R}, |z_0| < 1\,.$$

Folgern Sie daraus mit Hilfe des *Schwarzschen Lemmas*, dass E keine weiteren Automorphismen besitzt. Was folgt damit für $Aut(H)$?

Aufgabe 17 [Wurzeln, Logarithmus]

Es seien $S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ und $G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass cos den Streifen S biholomorph auf die zweifach geschlitzte Ebene G abbildet.

b) Bestimmen Sie eine auf G holomorphe Funktion f mit $f^2(z) = z^2 - 1$ und $f(0) = i$.

c) Die Umkehrabbildung zu $\cos : S \to G$ ist dann gegeben durch

$$F : G \to S, \quad F(z) = -i \ln(z + f(z))\,.$$

Aufgabe 18

Beweisen Sie den *Fundamentalsatz der Algebra* mit Hilfe des *Satzes von Liouville*.