

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Funktionentheorie I"

Abgabe bis Di. 31.05.2005

Aufgabe 19 [Singularitäten]

Untersuchen Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und bestimmen Sie Haupt- und Nebenteil:

- a) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$
- b) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$
- c) $f(z) = \cot(z)$
- d) $f(z) = \pi h(z) \cot(z)$, h holomorph in \mathbb{C} .
- e) $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$

Aufgabe 20 [Laurententwicklung]

Berechnen Sie die Laurententwicklung der folgenden Funktionen in dem angegebenen Punkt, bzw. auf dem angegebenen Gebiet:

- a) $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$.
- b) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$.
- c) $f(z) = \frac{\sin(z) - 1}{z^2(z-1)}$, $0 < z < 1$.
- d) $f(z) = \frac{\sin(z) - 1}{z^2(z-1)}$, $1 < z$.
- e) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$, $1 < |z| < 2$.
- f) $f(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^k$, $1 < |z|$

Aufgabe 21 [Zyklen von Wegen]

Geben Sie jeweils einen Zykel $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ in \mathbb{C} mit folgenden Eigenschaften an, wobei $W \subset \mathbb{C}$ das Bild des Zyklus ist:

- 1) Es gibt für jedes $k = -n, -n+1, \dots, n-1, n$ je genau eine Zusammenhangskomponente G_k von $\mathbb{C} \setminus W$, in der $N(\Gamma, z) = k$ beträgt.
- 2) $N(\Gamma, z)$ nimmt in $\mathbb{C} \setminus W$ nur geradzahlige Werte an und dabei wenigstens einen $\neq 0$.
- 3) $\mathbb{C} \setminus W = G_0 \cup G_1$, wobei $N(\Gamma, z) = \alpha$ auf G_α und weder G_0 noch G_1 sind zusammenhängend.

Kann Γ auch als geschlossener Weg gewählt werden?

Hinweis: Wenn Ihnen die explizite Beschreibung der Wege schwerfällt, reicht auch eine Skizze des Bildes W .