Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker

SS 2005

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Funktionentheorie I"

Abgabe bis Di. 14.06.2005

Aufgabe 24

a) Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in all ihren Singularitäten:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2-1} \qquad f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3} \qquad f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-i)} \qquad f(z) = \big(z + \frac{1}{z}\big)e^{\frac{1}{z^2}}$$

b) Sei B ein um $0 \in \mathbb{C}$ symmetrisches Gebiet. Die Funktion f sei auf $B \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ holomorph und für $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ erfülle f die Symmetriebeziehung $f(z) = \varepsilon f(-z)$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in B$ gilt:

$$Res_z f = -\varepsilon Res_{-z} f$$

Aufgabe 25

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden Integrale:

$$\int_{S_2(0)} \frac{dz}{\sin^2 z \cos z} \qquad \int_{S_1(0)} \frac{\sin z \, dz}{z^4(z^2+2)}$$

$$\int_{S_2(0)} e^{z+\frac{1}{z}} dz \qquad \int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}\, dz}{z^2+1}$$

wobei $\gamma(t) = 2e^{i\pi t}$ für $0 \leq t \leq 1$ und $\gamma(t) = 4t - 6$ für $1 \leq t \leq 2$.

Aufgabe 26

a) Die Funktion f sei auf $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ holomorph. Zeigen Sie, dass $g(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ auf einem Kreisring $K = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < z < R\}$ holomorph ist und dass für das Residuum von g in $z = 0$ gilt:

$$Res_0 g = \sum_{z \in \mathbb{C}} Res_z f\,.$$

b) Zeigen Sie mit Aufgabenteil a) $\displaystyle\int_{S_1(0)} \frac{5z^6+4}{2z^7+1} dz = 5\pi i\,,$

c) und berechnen Sie ebenfalls mit der Hilfe von a) alle Residuen von $ze^{\frac{1}{z^2+1}}$.