Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker

SS 2005

10. Übungsblatt zur Vorlesung “Funktionentheorie I”

Abgabe bis Di. 21.06.2005

Aufgabe 27

1. Gegeben sei das Polynom $p(z) = z^4 + 6z + 3$. Zeigen Sie, dass p genau eine Nullstelle in $B_1(0)$ und genau drei Nullstellen in $B_2(0) \setminus \bar{B}_1(0)$ hat.
2. Zeigen Sie, dass die Gleichung $ze^z = a$ für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < e^{-1}$ eine Lösung in E besitzt.

Aufgabe 28

Berechnen Sie für die auf $B_r(0)$, $r > 1$, holomorphe Funktion f:

$$\int_{S_1(0)} \big(2 \pm \big(z + \frac{1}{z}\big)\big) \frac{f(z)}{z} dz,$$

und leiten Sie daraus die folgenden Formeln ab:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = 2f(0) + f'(0)$$
$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = 2f(0) - f'(0)$$

Aufgabe 29

Zeigen Sie für $a > 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2x)\, dx}{(a + \cos x)(a - \sin x)} = -4\pi\big(1 - \frac{2a\sqrt{a^2 - 1}}{2a^2 - 1}\big)$$

Aufgabe 30

Beweisen Sie die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

indem Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}$ mit $a = e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\pi}$ längs eines Parallelogramms mit den Ecken $(-r, -r + a, r + a, r)$ integrieren und danach den Grenzwert $r \to \infty$ durchführen. Nutzen Sie zwischendurch die Identität $f(z) - f(z + a) = e^{-z^2}$.