Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker

SS 2005

11 Übungsblatt zur Vorlesung "Funktionentheorie I"

Abgabe bis Di. 28.06.2005

Aufgabe 31 [Residuensatz]

a) Gegeben sei eine rationale Funktion $R = \frac{P}{Q}$ auf $\mathbb{C}$. Das Polynom Q habe keine reellen Nullstellen und der Grad von Q sei um mindestens eins größer als der Grad von P. Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral existiert und den angegebenen Wert hat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{it}dt = 2\pi i \sum_{\xi\in H} res_\xi\big(R(z)e^{iz}\big)\,.$$

Hinweis: Integrieren Sie die Funktion $R(z)e^{iz}$ über den Halbkreis in H mit Mittelpunkt 0 und Halbmesser auf der reellen Achse.

b) Berechnen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+16}, \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{1+x^4}$$

Aufgabe 32 [Reelle Integration, Residuensatz]

Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\,.$$

Aufgabe 33 [Satz von Mittag-Leffler, Residuensatz]

Zeigen Sie, dass der Cotangens die folgenden Partialbruchzerlegungen hat:

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(\xi) := \frac{z}{\xi(z-\xi)}\pi\cot(\pi\xi)$ mit einfachen Polen in $\xi = z, \pm1, \pm2, \ldots$ und einem zweifachen Pol in $\xi = 0$. Integrieren Sie diese Funktion über den Rand von $(-m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}) \times (-m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}) \subset \mathbb{C}$ und führen Sie den Grenzwert $m \to \infty$ durch.