Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker

SS 2005

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Funktionentheorie I"

Abgabe bis Di. 05.07.2005

Aufgabe 34 [Weierstraßscher Produktsatz]

Sei $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ der kommutative Ring der ganzen Funktionen, so ist für $M \subset \mathbb{C}$ die Menge $\mathcal{I}_M = \big\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \,|\, f|_M \equiv 0 \big\}$ ein Ideal in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, das heißt $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \cdot \mathcal{I}_M \subset \mathcal{I}_M$.

Zeigen Sie mit Hilfe des *Weierstraßschen Produktsatzes*, dass $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ nicht Noethersch ist. Das heißt, konstruieren Sie eine unendliche, echt aufsteigende Kette von Idealen $\mathcal{I}_1 \subsetneq \mathcal{I}_2 \subsetneq \cdots$ in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Hinweis: Konstruieren Sie Ideale vom Typ $\mathcal{I}_M$.

Aufgabe 35 [gleichmäßige Konvergenz im Inneren]

Im Beweis des *Weierstraßschen Produktsatzes* wurde eine Tatsache benutzt, die hier bewiesen werden soll:

Sei $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ ein im Inneren des Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergentes Produkt aus in G holomorphen Funktionen f_n. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n}$ eine im Inneren von G gleichmäßig converegente Reihe meromorpher Funktionen und es gilt

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n} \,.$$

Aufgabe 36

1. Zeigen Sie, dass das Produkt
$$\prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{z}{n}\big) e^{-\frac{z}{n}}$$
im Inneren von $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert und eine ganze Funktion $H(z)$ darstellt. Bestimmen Sie die Nullstellen von H und deren Ordnungen.

2. Für die Funktion H aus 1) zeigen Sie die Funktionalgleichung
$$H(z-1) = e^{\gamma}\, z\, H(z)$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ und mit der *Eulerschen Konstanten* $\gamma := \lim_{n\to\infty} \big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\big)$.

3. Zeigen Sie, dass $G(z) := \Big(z e^{\gamma z} H(z)\Big)^{-1}$ die folgenden Eigenschaften hat:
$$G(1) = 1, \qquad G(z+1) = zG(z)\,.$$