Prof. Dr. Gerhard Rosenberger
Dr. Frank Klinker SS 2005

13. Übungsblatt zur Vorlesung “Funktionentheorie I”

Abgabe bis Di. 12.07.2005

Aufgabe 37

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ heißt BESCHRÄNKT NORMAL, wenn jede Folge in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die im Inneren gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion konvergiert. Das heißt, wenn sie normal ist und keine Folge im Inneren gegen ∞ konvergiert.

Bemerkung : Die beschränkt normalen Familien sind die relativ kompakten Mengen.

1. Zeigen Sie, dass für eine beschränkt normale Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ die Familie der Ableitungen $\mathcal{F}' = \{f' \mid f \in \mathcal{F}\}$ ebenfalls beschränkt normal ist.
2. Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass 1. für normale Familien im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 38

1. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ sei eine Familie mit folgenden Eigenschaften
   - $\bullet_1$ $\mathcal{F}' = \{f' \mid f \in \mathcal{F}\}$ ist beschränkt normal und
   - $\bullet_2$ es gibt einen Punkt $z \in G$, so dass die Menge $\{f(z_0) \mid f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt ist.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ beschränkt normal ist.
2. Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die obige Aussage für normale Familien im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 39

Es sei $E \subset \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe. Untersuchen Sie, ob die Familien

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ f \in \mathcal{O}(E) \,\middle|\, |f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} \forall z \in E \right\}$$

und

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ f \in \mathcal{F}_1 \,\middle|\, f(0) = 0, f'(0) = 1, f \text{ injektiv} \right\}$$

normal bzw. kompakt sind.