Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Mo, 17.04.2005, 14h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II
Übungsblatt 1

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle (komplexen) Eigenwerte der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $M(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die $\alpha \in [0, 2\pi[$, für die $M(\alpha)$ einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

Aufgabe 3:
Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Diagonalisierbarkeit über $K = \mathbb{C}$. Bestimmen Sie gegebenfalls die zugehörigen Transformationsmatrizen.

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:
Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt $A^2 = E_n$ genau dann, wenn A ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix mit Diagonalelementen 1 oder -1. (Tipp: Betrachten Sie $x - Ax$ für $x \in K^n$)

b) Die Eigenwerte von A^2 mit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind nicht-negativ.

c) Jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $A^2 = -E_n$ ist diagonalisierbar.