Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Mo, 02.05.2005, 14h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II
Übungsblatt 3

Aufgabe 1:
Sei $V := \{f \in K[t] \mid \text{grad}\,(f) \leq 5\}$. Die lineare Abbildung $\varphi : K[t] \to K[t]$ sei definiert durch

$$\varphi(f) := \frac{d}{dt}f, \quad f \in V.$$

Für die Monome $t^n \in V,\ n \geq 1$ gilt also $\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$ bzw. $\frac{d}{dt}1 = 0$.

a) Man bestimme für $K = \mathbb{R}$ alle φ-invarianten Unterräume von V.

b) Gibt es für $K = \mathbb{R}$ eine echte φ-invariante Zerlegung von V?

c) Gibt es für $K = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ eine echte φ-invariante Zerlegung von V?

Aufgabe 2:
Sei $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ mit $A^{10} = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $A^5 = 0$ gilt.

Aufgabe 3:
Untersuchen Sie folgende Matrizen $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ auf Diagonalisierbarkeit bzw. Trigonalisierbarkeit. Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen Transformationsmatrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:
Es sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ ein Endomorphismus, der bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^5$ die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

besitzt. Berechnen Sie die verallgemeinerten Eigenräume zu den Eigenwerten von f und geben Sie Basen dieser verallgemeinerten Eigenräume an. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bzgl. der auf diese Art gewonnenen Basis von $\mathbb{R}^5$.

Klausurtermin: Samstag, 30.Juli 2005, $9^{\underline{00}} - 12^{\underline{00}}$ Uhr
Nachklausurtermin: Samstag, 15.Oktober 2005, $9^{\underline{00}} - 12^{\underline{00}}$ Uhr