Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Mo, 09.05.2005, 14h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II
Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ und $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die zugehörige lineare Abbildung.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ zum einen φ-invariant ist, zum anderen als direkte Summe eines ein- und eines zweidimensionalen φ-invarianten Unterraumes beschreiben läßt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Es existiert eine Basis B_v von V, so dass

$$\mathrm{M}_{B_v}^{B_v}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist (diese Matrix wird Frobenius Begleitmatrix genannt).

b) V ist φ-zyklisch, d.h. es existiert $v \in V : \; V = \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots \rangle$.

Aufgabe 3:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen auf Trigonalgestalt gebracht werden können, und geben Sie gegebenenfalls eine Transformationsmatrix an.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$; b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}})$.