Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 17.05.2005, 10h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II
Übungsblatt 5

Aufgabe 1:
Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Jordan-Matrix. Man zeige:

a) $\lambda \in K$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn in A ein Jordan-Block $J_q(\lambda)$ vorkommt.

b) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A und μ_{ij} für $i \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq k$ die Anzahl der $J_i(\lambda_j)$-Blöcke, so gilt:

$$\mu_{ij} = \mathrm{Rang}(A_j^{i-1}) - 2\mathrm{Rang}(A_j^i) + \mathrm{Rang}(A_j^{i+1}),$$

wobei $A_j := A - \lambda_j E_n$ gilt.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von $A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $A = S(D+N)S^{-1}$, wobei D Diagonalmatrix, N nilpotent, $DN = ND$ und $J = D + N$ Jordanmatrix ist. Berechnen Sie A^{50} (Tipp: siehe LinA 1 Blatt 11)

Aufgabe 4:
Die Spur von $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ ist definiert als $\mathrm{Sp}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeigen Sie:

a) Die Spur ist eine lineare Abbildung $\mathrm{M}_n(K) \to K$,

b) Für $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$,

c) Folgern Sie für invertierbares B, dass $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(BAB^{-1})$,

d) Ist $\mathrm{Sp}(AB) = 0$ für alle $B \in \mathrm{M}_n(K)$, so folgt $A = 0$.