Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Mo, 23.05.2005, 14h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Die Matrix A bestimmt einen Endomorphismus $f_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $v \mapsto Av$. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform J von f_A; geben Sie sowohl die Transformationsmatrix S mit $J = S^{-1}AS$ als auch die Basis $B = (v_1, v_2)$ an, bezüglich der f_A die darstellende Matrix J besitzt.

b) Die Matrix A bestimmt eine Bilinearform gemäß $b(e_i, e_j) := a_{ij}$. Berechnen Sie die Gramsche Matrix $\mathrm{M}_B(b)$ (siehe Vorlesung: Koordinaten von Bilinearformen) der Bilinearform bezüglich der Basis $B = (v_1, v_2)$ aus Aufgabenteil a).

Aufgabe 2:

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rad}(V) := \{v \in V \mid v^\perp = V\}$ ein Unterraum von V ist. Er heißt *Radikal von b*.

b) Sei $B := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis. Bestimmen Sie das Radikal der Bilinearform $b : V \times V \to K$ mit

$$\mathrm{M}_B(b) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Sei $b : V \times V \to K$ eine (nicht notwendig symmetrische) bilineare Abbildung mit Gramscher Matrix $(a_{ij}) := (b(v_i, v_j))$. Für jedes $v \in V$ sind

$$b(v, -) : V \to K, \qquad w \mapsto b(v, w)$$

und

$$b(-, v) : V \to K, \qquad w \mapsto b(w, v)$$

Linearformen. Damit erhalten wir die linearen Abbildungen

$$\varphi : V \to V^*, \qquad v \mapsto b(v, -)$$

und

$$\psi : V \to V^*, \qquad v \mapsto b(-, v).$$

a) Sei $v = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n$. Berechnen Sie die darstellenden Matrizen von $b(v, -)$ und $b(-, v)$ bezüglich der Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und 1 von K.

b) Berechnen Sie die darstellenden Matrizen von φ und ψ bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ und der dualen Basis $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$.

c) Zeigen Sie: $\dim \ker \varphi = \dim \ker \psi$.